Tema 11: Teoremas de la Aplicación Abierta y Gráfica Cerrada

21 y 24 de junio de 2010

Categoría y espacios de Baire

Conjuntos de primera y segunda categoría

E espacio topológico, $A \subset E$

A es de primera categoría en E cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad \text{donde} \quad F_n = \overline{F_n} \subset E\,, \ \operatorname{int} F_n = \emptyset\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso, A es de segunda categoría en E

Espacios de Baire

Para un espacio topológico E, son equivalentes:

(1) $A \subset E$, $\operatorname{int} A \neq \emptyset \implies A$ de 2^a categoría en E

(2) A de 1^a categoría en $E \implies \operatorname{int} A = \emptyset$

(3) $F_n = \overline{F_n} \subset E \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \neq \emptyset \implies \exists m \in \mathbb{N} : \operatorname{int} F_m \neq \emptyset$

(4) $G_n = \operatorname{int} G_n\,,\ \overline{G_n} = E \ \ \forall n \in \mathbb{N} \implies \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n} = E$

Se dice que E es un espacio de Baire cuando las verifica. En particular, un espacio de Baire es de segunda categoría en sí mismo

Lema de Baire y primeras aplicaciones

Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

Ejemplos

- La categoría es relativa: $\mathbb{R}$ es de 2^a categoría en $\mathbb{R}$, de 1^a en $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$, A de 1^a en $E_1 \;\Rightarrow\; A$ de 1^a en E_2
- Una unión numerable de conjuntos de 1^a categoría es de 1^a categoría
- $\mathbb{Q}$ es de 1^a categoría en sí mismo, luego no es metrizable-completo
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es de 2^a categoría en $\mathbb{R}$ (luego $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable)

Aplicaciones

- "Abundan" las funciones continuas no derivables así como las de clase C^∞ no analíticas
- La dimensión de un F-espacio (en particular, de un espacio de Banach) es finita o no numerable

Esquema de la demostración

Aplicaciones casi-abiertas

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal:

T es abierta cuando: U entorno de cero en $X \Rightarrow T(U)$ entorno de cero en Y

Se dice que T es casi-abierta cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

Primer paso (categoría)

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal

$$T(X) \text{ de } 2^a \text{ categoría en } Y \implies T \text{ casi-abierta}$$

Segundo paso (aproximaciones sucesivas)

X F-espacio, Y EVT metrizable, $T \in L(X, Y)$

$$T \text{ casi-abierta} \implies T \text{ abierta, } T(X) = Y\,,\ Y \text{ F-espacio}$$

Versiones del Teorema

Resultado de los dos pasos anteriores

X F-espacio, Y EVT metrizable, $T \in L(X,Y)$

$T(X)$ de 2^a categoría en $Y \implies T$ abierta, $T(X) = Y$, Y F-espacio

Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

X, Y F-espacios, $T \in L(X,Y)$

$T(X) = Y \implies T$ abierta

Teorema de los Isomorfismos de Banach

X, Y F-espacios, $T \in L(X,Y)$

T biyectiva $\implies T^{-1}$ continua

Teorema del Homomorfismo de Banach

X, Y F-espacios, $T \in L(X,Y)$

$T(X) = \overline{T(X)} \implies T$ homomorfismo

Aplicación a series de Fourier

Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\, e^{int}$ donde $a:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi,\pi]$$

Coeficientes de Fourier: $\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}\,ds \qquad (n\in\mathbb{Z})$

Serie de Fourier: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{int}$

Problema

¿Qué series trigonométricas son series de Fourier?

Para $a:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ ¿$\exists f\in L_1 : \widehat{f}=a$?

- Lema de Riemann-Lebesgue: $\lim_{n\to\pm\infty} \widehat{f}(n) = 0 \qquad \big(\widehat{f}\in c_0(\mathbb{Z})\big)$
- Teorema de unicidad: $f,g\in L_1\,,\ \widehat{f}=\widehat{g} \implies f=g$ (c.p.d.)

Aplicación a series de Fourier

Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

$$T : L_1 \to c_0(\mathbb{Z}), \quad T(f) = \widehat{f}$$

- T es lineal, continuo e inyectivo
- L_1 y $c_0(\mathbb{Z})$ no son isomorfos
- Luego T no es sobreyectivo
- Luego $T(L_1)$ es de 1^a categoría en $c_0(\mathbb{Z})$
- Entre las series trigonométricas con coeficientes tendiendo a cero las series de Fourier son "atípicas". El lema de Riemann-Lebesgue está muy lejos de caracterizar las series de Fourier.

Aplicación a ecuaciones diferenciales

Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial: $y_0, y_1, y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas
Datos del problema: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED): $y_0\,\ddot{x} + y_1\,\dot{x} + y_2\,x = f$ (CC): $x(a) = \alpha\,,\ \ x(b) = \beta$

Solución (clásica): función $x \in C^2[a,b]$ verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

Tratamiento funcional

$X = C^2[a,b]$ espacio de Banach: $\|x\| = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty + \|\ddot{x}\|_\infty$

$Y = C[a,b] \times \mathbb{R}^2$ espacio de Banach: $\|(f,\alpha,\beta)\| = \|f\|_\infty + |\alpha| + |\beta|$

Operador de X en Y: $T(x) = \big(y_0\,\ddot{x} + y_1\,\dot{x} + y_2\,x\,,\, x(a)\,,\, x(b)\big)$

- T es lineal y continuo
- Problema bien planteado $\iff$ T biyectivo
- Teorema de los isomorfismos de Banach: si el problema está bien planteado, la solución depende de manera continua de los datos

Teorema de la Gráfica Cerrada

Relación entre continuidad y gráfica cerrada

X, Y espacios topológicos de Hausdorff, $f : X \to Y$,

$$\operatorname{Gr} f = \Big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in X \Big\} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua} \implies \operatorname{Gr} f \text{ cerrada}$$

El recíproco está lejos de ser cierto

X, Y espacios métricos:

- f es continua cuando: $\{x_n\} \to x \implies \{f(x_n)\} \to f(x)$
- $\operatorname{Gr} f$ es cerrada cuando: $\{x_n\} \to x\,,\ \{f(x_n)\} \to y \implies f(x) = y$

Teorema de la Gráfica Cerrada

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal, $\operatorname{Gr} T$ cerrada $\implies$ T continuo

Por tanto, para asegurar que T es continuo basta probar:

$$\{x_n\} \to 0\,,\ \{T x_n\} \to y \implies y = 0$$

Ejemplos de aplicación

Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

E espacio topológico de Hausdorff, $J : Y \to E$ inyectiva y continua

$$J \circ T \ \text{ continua } \implies T \ \text{ continuo}$$

Caso particular

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

$\Phi \subset Y^*$ subconjunto que separe puntos:

$$y \in Y\,, \quad f(y) = 0 \ \forall f \in \Phi \implies y = 0$$

$$f \circ T \ \text{ continuo } \ \forall f \in \Phi \implies T \ \text{ continuo}$$

Ejemplos

- $Y = l_p \ \ (0 < p \leqslant \infty)\,, \ \ \Phi = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}\,, \ f_n(y) = y(n) \ \forall y \in Y\,, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- $Y = L_p[0,1] \ \ (0 < p \leqslant \infty)\,, \ E = L_0[0,1]\,, \ Jy = y \ \forall y \in Y$
- $Y = C[0,1]\,, E = \mathbb{K}^{[0,1]}\,, \ Jy = y \ \forall y \in Y$